

# Physique Numérique - Exercice 5

## Étude de la propagation d'une vague dans un océan de profondeur non uniforme

Jakob Adomeit, Nils Coutant  
[jakob.adomeit@epfl.ch](mailto:jakob.adomeit@epfl.ch), [nils.coutant@epfl.ch](mailto:nils.coutant@epfl.ch)

2 août 2025

## Table des Matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Théorie</b>	<b>2</b>
2.1	Énoncé du problème . . . . .	2
2.2	Modes propres dans un cas particulier . . . . .	2
2.3	Analyse WKB d'équations différentielles . . . . .	3
2.4	Implémentation <code>c++</code> . . . . .	3
2.5	Sortie au bord de gauche . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Simulations et analyses</b>	<b>4</b>
3.1	Vitesse de propagation constante . . . . .	4
3.2	Vague approchant de la plage . . . . .	8
3.3	Facultatif : Prédiction WKB plus complète . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>15</b>

## 1 Introduction

Cette étude analyse la propagation d'une vague en eau peu profonde. La hauteur de l'océan est non uniforme et affecte la vitesse de phase des vagues. Trois équations de propagation seront comparées. Dans un premier temps, les modes propres seront déterminés dans un cas particulier. Puis, des analyses WKB seront réalisées pour les trois équations. Le problème sera implémenté dans un algorithme d'intégration numérique selon un schéma explicite à trois niveaux. Les conditions aux bords, la profondeur de l'eau, la forme initiale de la vague ainsi que la direction de propagation pourront être configurés. La simulation permettra d'abord d'étudier le cas à profondeur et vitesse de phase constantes. Les résultats de la simulation, la stabilité, les modes propres et l'excitation résonnante des modes propres seront traités. Dans un second temps, la simulation permettra d'étudier le problème plus complexe d'une vague approchant de la plage. La hauteur de la crête, sa vitesse, l'effet de pentes raides et l'impacte de l'équation choisie seront examinés. Enfin, l'évolution temporelle de la vague sera déterminée en calculant numériquement une intégrale obtenue par analyse WKB.

## 2 Théorie

### 2.1 Énoncé du problème

Une vague se propage dans un océan de faible profondeur, et non uniforme. Le problème est considéré selon une dimension de l'espace dans un océan de longueur  $L$ . Le champ scalaire  $f(x, t)$  donne la hauteur de la vague en position  $x \in [0, L]$  au temps  $t$ . La vitesse de propagation  $u$  est donnée par l'équation

$$u(x) = \sqrt{gh_0(x)} \quad (1)$$

avec  $g = 9.81 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  l'accélération terrestre [1], et  $h_0(x) > 0$  la profondeur à l'équilibre de l'océan en position  $x$ . Trois équations décrivant la propagation de la vague sont étudiées

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (\text{A}) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( u^2 \frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad (\text{B}) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u^2 f) \quad (\text{C})$$

### 2.2 Modes propres dans un cas particulier

Pour ces calculs, la profondeur  $h_0$  est constante, la vitesse  $u$  l'est donc aussi par l'équation (1). Les équations (A), (B) et (C) sont donc équivalentes. Elles sont résolues par séparation de variables en posant  $f(x, t) = X(x)T(t)$ .

$$\frac{1}{T(t)} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}(t) = \frac{u^2}{X(x)} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}(x)$$

Le côté gauche dépendant seulement de  $t$  est égal au côté droit dépendant seulement de  $x$ . Alors, ces deux expressions sont égales à une constante  $-\omega^2$ , choisie négative afin d'éviter des évolutions exponentielles.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}(t) = -\omega^2 T(t) \quad \Rightarrow \quad T(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

avec  $A$  l'amplitude et  $\phi$  un déphasage. L'équation pour  $X(x)$  donnerait un même résultat avec la fréquence  $k = \frac{\omega}{u}$ . Mais, il est préférable d'exprimer  $X(x)$  comme une somme de modes propres grâce à la série de Fourier

$$X(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(k_n x) + b_n \sin(k_n x)$$

Le bord de gauche est libre, il s'agit donc d'un ventre :  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_L = 0) = 0 \Rightarrow b_n = 0$ . Tandis que le bord droit est fixe, il s'agit d'un nœud :  $f(x_R, t) = 0 \Rightarrow k_n = \frac{\pi}{x_R} \cdot (n + \frac{1}{2}) = \frac{\pi}{L} \cdot (n + \frac{1}{2})$ . L'équation d'onde étant linéaire, si chaque mode propre respecte l'équation, leur somme la respectera aussi. En reprenant, la forme établie précédemment pour la dépendance temporelle pour chaque mode propre, la solution générale s'exprime

$$f(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t) \cos\left(\frac{\pi}{L} \left(n + \frac{1}{2}\right) x\right) \quad (2)$$

où les déphasages sont ici fixés à 0 et les fréquences propres sont  $\omega_n = uk_n = \frac{u\pi}{L} \cdot (n + \frac{1}{2})$ . Les coefficients d'amplitude  $a_n$  peuvent être déterminés grâce à la série de Fourier de l'état initial  $f(x, t = 0)$ . En considérant uniquement le mode propre  $n$ , l'expression de l'onde est

$$f_n(x, t) = a_n \cos\left(\frac{u\pi}{L} \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right) t\right) \cos\left(\frac{\pi}{L} \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right) x\right) \quad (3)$$

## 2.3 Analyse WKB d'équations différentielles

La profondeur  $h_0(x)$  est maintenant non uniforme. Une analyse WKB des équations (A), (B) et (C) est réalisée. Avec les Ansatz,

$$f(x, t) = \hat{f}(x)e^{-i\omega t} \quad \hat{f}(x) = A(x)e^{iS(x)}$$

et en considérant les ordres  $n$  des perturbations  $\varepsilon^n$  suivantes  $S' \sim \varepsilon^0$   $u^2 \sim \varepsilon^0$   $A \sim \varepsilon^0$ , l'équation (A) devient

$$-\omega^2 \hat{f} = u^2 \frac{d^2 \hat{f}}{dx^2} \Rightarrow -\omega^2 A e^{iS} = u^2 \cdot (A'' + 2iA'S' + iAS'' - AS'^2) \cdot e^{iS}$$

L'ordre  $\varepsilon^0$  donne

$$-\omega^2 A = -u^2 AS' \Rightarrow S'(x) = \frac{w}{u(x)} = k(x) \Rightarrow S(x) = \int_0^x \frac{w}{u(y)} dy + \text{cst} \quad (4)$$

puis l'ordre  $\varepsilon^1$

$$2iuA'\omega - iAu'\omega = 0 \Rightarrow A(x) = A_0 \sqrt{u(x)} = A_0 (g \cdot h_0(x))^{1/4} \quad (5)$$

avec  $A_0$  une constante caractérisant l'amplitude de la vague.

L'analyse de l'équation (B) est décrite dans les Notes de cours [2]. Les résultats obtenus sont

$$S'(x) = \frac{w}{u(x)} = k(x) \quad A(x) = \frac{A_0}{(g \cdot h_0(x))^{1/4}} \quad (6)$$

Enfin, avec les mêmes Ansatz et ordres de perturbations que pour l'équation (A), l'équation (C) devient

$$-\omega^2 A e^{iS} = e^{iS} \cdot ((u^2)'' + 2(u^2)'A' + u^2 A'' + 2i(u^2)'AS' + 2iu^2 A'S' + iu^2 AS'' - u^2 AS'^2)$$

L'ordre  $\varepsilon^0$  donne également

$$-\omega^2 A = -u^2 AS' \Rightarrow S'(x) = \frac{w}{u(x)} = k(x) \quad (7)$$

Puis l'équation d'ordre  $\varepsilon^1$

$$0 = 2i(u^2)'AS' + 2iu^2 A'S' + iu^2 AS'' \Rightarrow 3Au' = -2uA' \Rightarrow A(x) = \frac{A_0}{(u(x))^{3/2}} = \frac{A_0}{(gh_0(x))^{3/4}} \quad (8)$$

Ainsi, les solutions sont de la forme

$$f(x, t) = A_0 \cdot (gh_0(x))^\alpha \exp \left\{ i \left( \int_0^x \frac{w}{u(y)} dy - \omega t \right) \right\} \quad (9)$$

où la constante d'intégration de  $S'$  est absorbée dans  $A_0$  et avec  $\alpha = \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}$  pour les équations (A), (B) et (C) respectivement.

## 2.4 Implémentation c++

Une maillage régulier  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = L$  de paramètre  $h = x_{i+1} - x_i$  constant est utilisé. Les dérivées sont calculées selon la méthode des différences finies centrées aux points de maillage

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_i) \simeq \frac{g(x_{i+1}) - g(x_{i-1}))}{2h} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x_i) \simeq \frac{g(x_{i+1}) - 2g(x_i) + g(x_{i-1}))}{h^2}$$

avec  $g$  un champ scalaire à dériver [1].

Pour les équations (A), (B) et (C), on obtient alors les schémas à trois niveaux suivants :

$$f(x_i, t_{n+1}) = 2[1 - \beta^2(x_i)]f(x_i, t_n) + \beta^2(x_i)[f(x_{i+1}, t_n) + f(x_{i-1}, t_n)] - f(x_i, t_{n-1}) \quad (\text{A})$$

$$\begin{aligned} f(x_i, t_{n+1}) = & [\beta^2(x_i) + \frac{1}{4}\beta^2(x_{i+1}) - \frac{1}{4}\beta^2(x_{i-1})]f(x_{i+1}, t_n) + [\beta^2(x_i) - \frac{1}{4}\beta^2(x_{i+1}) \\ & + \frac{1}{4}\beta^2(x_{i-1})]f(x_{i-1}, t_n) + 2[1 - \beta^2(x_i)]f(x_i, t_n) - f(x_i, t_{n-1}) \end{aligned} \quad (\text{B})$$

$$\begin{aligned} f(x_i, t_{n+1}) = & [\beta^2(x_i) + \frac{1}{2}\beta^2(x_{i+1}) - \frac{1}{2}\beta^2(x_{i-1})]f(x_{i+1}, t_n) + [\beta^2(x_i) - \frac{1}{2}\beta^2(x_{i+1}) \\ & + \frac{1}{2}\beta^2(x_{i-1})]f(x_{i-1}, t_n) + [2 - 4\beta^2(x_i) + \beta^2(x_{i+1}) + \beta^2(x_{i-1})]f(x_i, t_n) - f(x_i, t_{n-1}) \end{aligned} \quad (\text{C})$$

Le programme permet également de calculer la quantité

$$E(t) = \int_0^L f^2(x, t) dx = h \cdot \sum_{i=0}^{N-1} \left( \frac{f^2(x_i, t) + f^2(x_{i+1}, t)}{2} \right) \quad (10)$$

où la règle des trapèzes [2] a été utilisée.  $E(t)$ , de dimension  $\text{m}^3$ , est directement proportionnel à l'énergie  $E_n$ . Avec certaines hypothèses,  $\mathcal{E}(t) = \rho g E(t)$  correspond à l'énergie par unité de longueur, car la vague est considérée sur un plan 2D sans profondeur. La démonstration se trouve en Annexes en équation (18).

## 2.5 Sortie au bord de gauche

Les conditions aux bords libre, fixe et excitation sont données dans les notes du cours [2]. La sortie de l'onde au bord droite est également donnée. Il reste donc seulement à décrire la démarche pour la sortie de l'onde au bord gauche. En dérivant  $f$  au voisinage de  $x_L$ , il suit

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x_L, t) = \frac{\partial}{\partial t} F(x_L + |u|t) = F'(x_L + |u|t)|u| = |u| \frac{\partial}{\partial x} F(x_L + |u|t) = |u| \frac{\partial f}{\partial x}(x_L, t)$$

Cette équation est discrétisée en utilisant des différences finies "forward" pour les dérivées partielles de  $f$  par rapport à  $x$  et  $t$ .

$$\begin{aligned} \frac{f(x_1, t_{n+1}) - f(x_1, t_n)}{\Delta t} &= |u| \frac{f(x_2, t_n) - f(x_1, t_n)}{\Delta x} \\ \implies f(x_1, t_{n+1}) &= |\beta| [f(x_2, t_n) - f(x_1, t_n)] + f(x_1, t_n). \end{aligned} \quad (11)$$

## 3 Simulations et analyses

### 3.1 Vitesse de propagation constante

Dans cette section, une situation simple d'un bassin avec profondeur constante  $h_0 = 4 \text{ m}$  est étudiée. Il est à noter qu'une profondeur constante implique que la vitesse de propagation  $u$  est constante d'après l'équation (1). Le bassin est choisi avec longueur  $L = 15 \text{ m}$ . Les conditions aux bords sont choisies comme libre à gauche et fixe à droite.



## Direction de propagation et réflexion

Une vague avec la forme initiale

$$f_{\text{init}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq x_1 \\ \frac{\hat{f}}{2} \left( 1 - \cos \left( 2\pi \cdot \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \right) \right) & \text{si } x_1 < x < x_2 \\ 0 & \text{si } x_2 \leq x \end{cases} \quad (12)$$

est considérée, où  $\hat{f} = 1$  m,  $x_1 = 3$  m et  $x_2 = 8$  m. De plus, le nombre d'intervalles spatiales est choisi comme  $n_x = 64$ . Le nombre d'étapes de calcul temporels  $n_{\text{steps}}$  est choisi de manière que  $\beta_{\text{CFL}, \text{max}} = 1$ .

La figure 1 illustre la propagation de la vague pour une propagation initiale rétrograde, progressive et une vague initialement stationnaire. Le temps final a été choisi comme  $f_{\text{fin}} = 10$  s ce qui correspond à environ deux aller-retours de la vague.

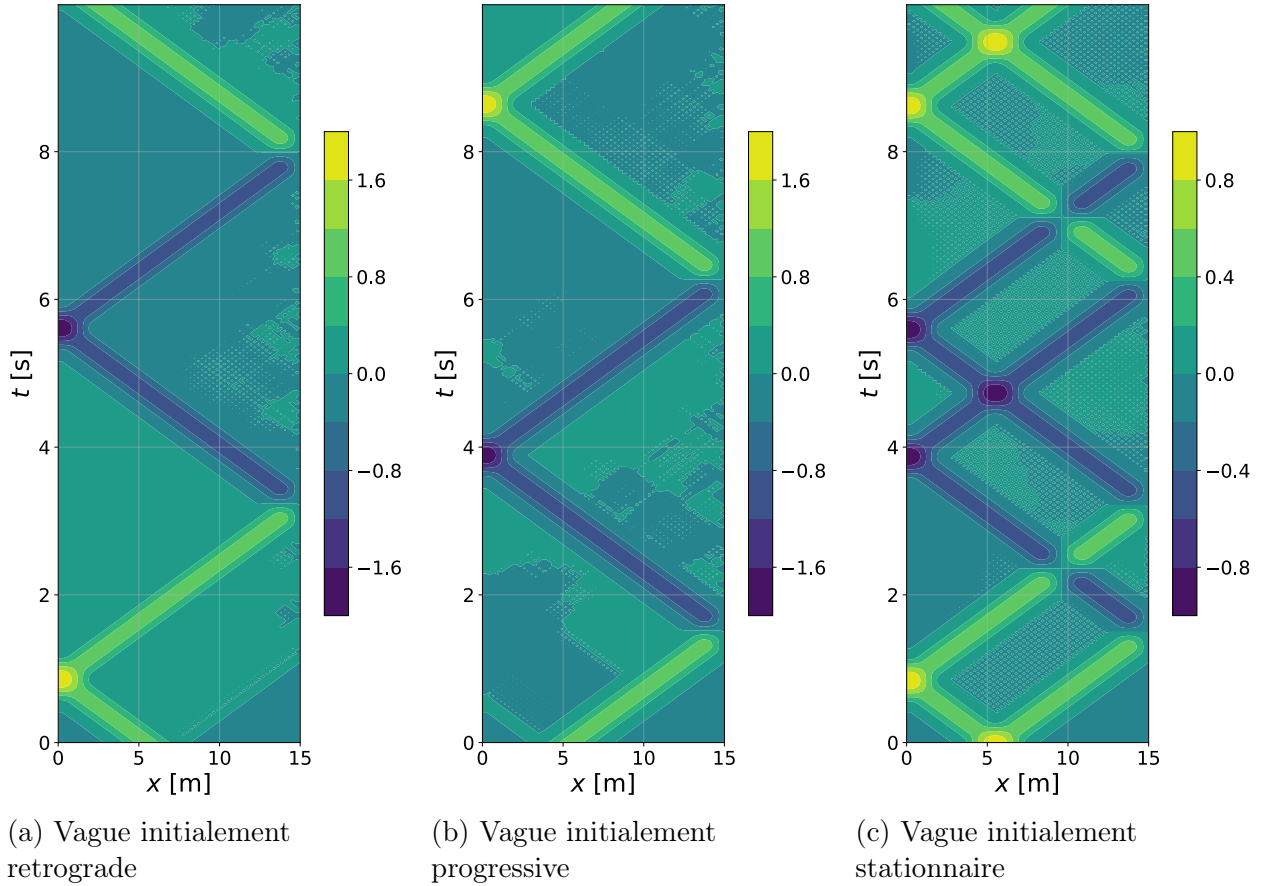


FIGURE 1 – Diagramme à lignes de niveau donnant l'amplitude de la vague  $f(x, t)$  pour des différentes directions de propagation initiales,  $\beta_{\text{CFL}, \text{max}} = 1$ .

Il est observé que lors d'une réflexion de la vague au bord gauche, la vague rétrograde devient une vague progressive mais est inchangée sinon. De plus, l'amplitude de la vague atteint temporairement le double de son amplitude avant réflexion. En effet, la vague est réfléchiée sans être inversée, elle interfère donc constructivement avec elle-même. À l'inverse, lors d'une réflexion au bord de droite, la vague ne change pas seulement de direction mais est en plus

inversée. En ce cas, l'amplitude de la vague ne dépasse pas son amplitude normale, mais devient même nulle à cause d'une interférence destructive entre la vague incidente et la vague réfléchie inversée. Le troisième cas avec la vague initialement au repos se comporte comme la superposition des deux premiers avec des amplitudes divisées par deux. Des interférences constructives à  $t \simeq 5$  s et  $t \simeq 9.5$  s ainsi que d'interférences destructives à  $t \simeq 2.5$  s et  $t \simeq 7$  s sont obtenues. En effet, l'état initial d'une vague stationnaire est en réalité une superposition d'une vague rétrograde et une vague progressive. Finalement, il est à noter que les trois systèmes étudiés reviennent à leur état initial après deux aller-retours. En effet, la vague est seulement inversée au bord droite et il deux inversions sont nécessaires pour espérer revenir au point de départ.

### Limite de stabilité

La figure 2 montre  $f(x, t)$  pour la vague initialement stationnaire examinée dans la section précédente pour des valeurs différentes de  $\beta_{\text{CFL}, \text{max}}$ . Pour comparaison, la figure 1c montre le cas  $\beta_{\text{CFL}, \text{max}} = 1$ .

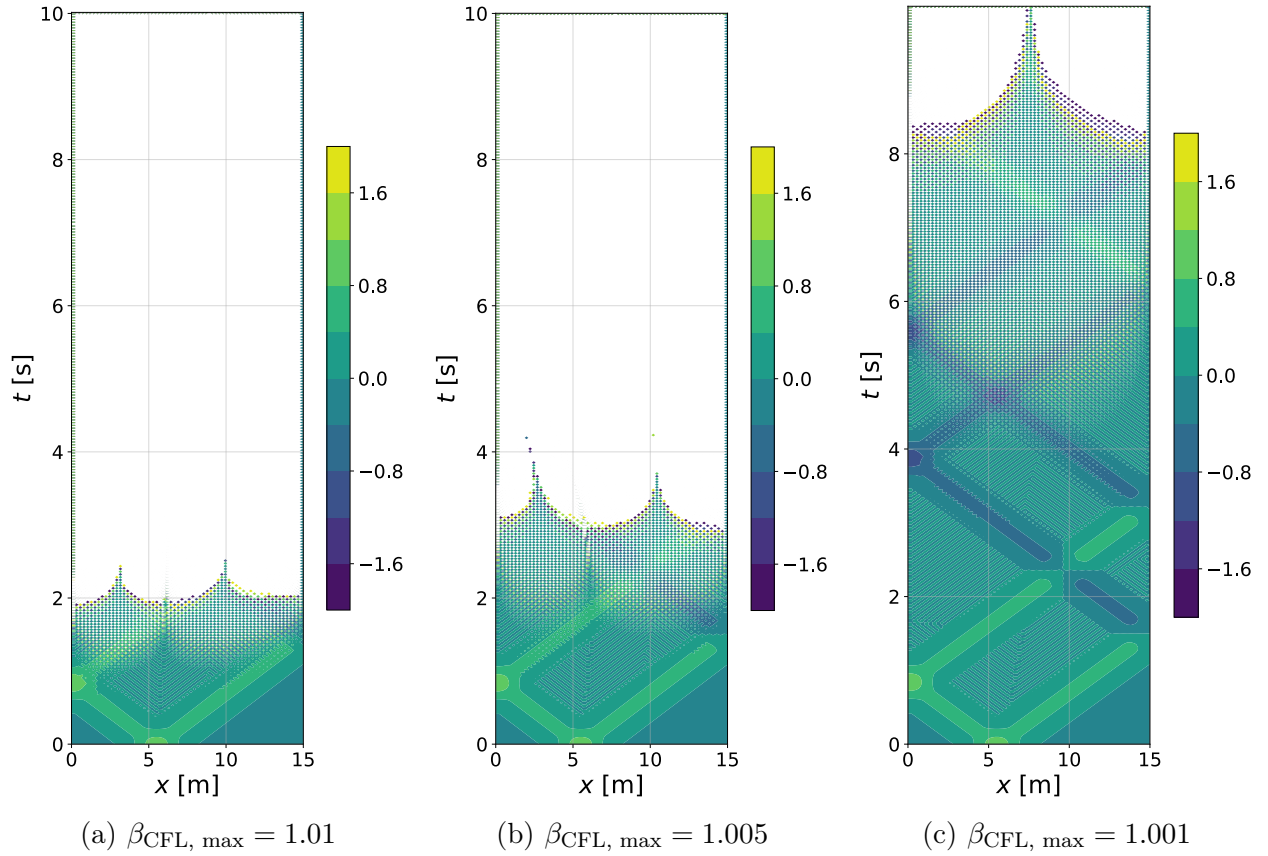


FIGURE 2 – Amplitude  $f(x, t)$  de la vague initialement stationnaire en forme d'un diagramme à lignes de niveau, pour des différents valeurs de  $\beta_{\text{CFL}, \text{max}}$  proches de 1. Le cas  $\beta_{\text{CFL}, \text{max}} = 1$  est montré en figure 1c.

Il est observé que pour  $\beta_{\text{CFL}, \text{max}} > 1$  la solution devient instable. Pour les valeurs de  $\beta_{\text{CFL}, \text{max}}$  plus proches de 1 un temps plus long est nécessaire pour observer l'instabilité. Alors la limite de stabilité trouvée analytiquement est aussi observée expérimentalement.

## Étude d'un mode propre

Pour initialiser le  $n$ -ème mode propre, l'équation (2) est évaluée en  $t = 0$ , donnant

$$f_n(x, 0) = a_n \cos(k_n x) = a_n \cos\left(\frac{\pi x}{L} \left(n + \frac{1}{2}\right)\right) \quad (13)$$

où  $a_n$  est l'amplitude du mode propre, choisie pour cette section comme  $a_n = 1$ . De plus, il est imposé que  $f(x_i, t_{-1}) = f(x_i, t_0) = f_{\text{init}}(x_i) \quad \forall i$ . Cela revient à considérer une vague initialement stationnaire. La période temporelle analytique du  $n$ -ème mode propre est donnée par

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{uk_n} = \frac{4L}{u(2n+1)} \quad (14)$$

Dans la suite, le deuxième mode propre ( $n = 2$ ) est analysé. Le temps final est choisi comme  $t_{\text{fin}} = T$ . La figure 3 montre une comparaison de l'état final avec l'état initial, ainsi qu'un diagramme à lignes de niveaux.

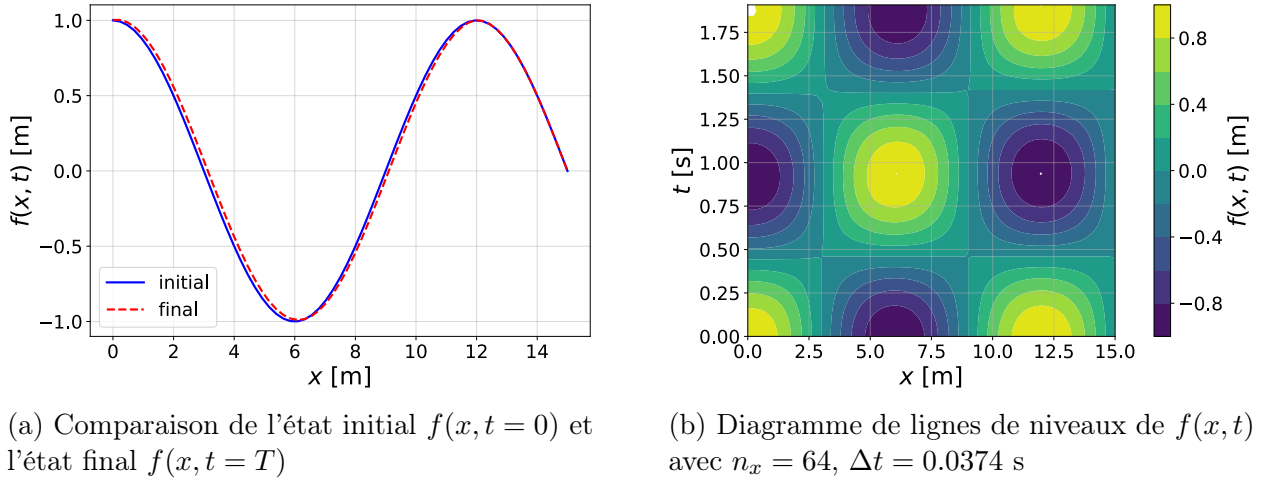


FIGURE 3 – Évolution du mode propre  $n = 2$  pendant une période  $T_n$

Une étude de convergence est effectuée à  $\beta_{\text{CFL}}$  constant en variant  $\Delta t$  et  $\Delta x$  au même rythme, caractérisé par  $m_{\text{mult}}$ . La solution analytique après une période satisfait  $f_n(x, t = T) = f_n(x, t = 0)$ . L'erreur est mesurée comme

$$\text{erreur} = \int_0^L |f_{\text{num}}(x, t = T) - f_{\text{ana}}(x, t = T)| dx. \quad (15)$$

La figure 4 illustre la convergence de l'erreur. Les valeurs de  $n_{\text{steps}}$  et  $n_x$  ont été choisies comme  $n_{\text{steps}} = m_{\text{mult}} n_{\text{steps},0}$  et  $n_x = m_{\text{mult}} n_{x,0}$ . Les valeurs  $\Delta t_0 = 16$  s et  $\Delta x_0 = 20$  choisies donnent une valeur de  $\beta_{\text{CFL}}$  proche de 1. Le paramètre varié pour l'étude de convergence est  $m_{\text{mult}}$ . Une convergence d'ordre 1 est observée.

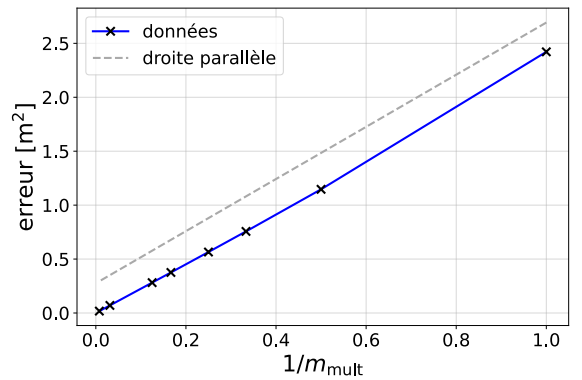


FIGURE 4 – Convergence de  $f(x, t = T)$  à  $\beta_{\text{CFL}}$  constant

## Excitation résonnante des modes propres

Dans cette section, l'excitation résonnante des modes propres est étudiée. La condition initiale est au repos, la condition au bord gauche est libre et la condition au bord droite qui était fixe dans la section précédente est maintenant une excitation. En effet, le point à droite est contraint de suivre l'évolution périodique

$$f(x_R, t) = A \sin(\omega t)$$

avec une faible amplitude  $A = 0.1$  m et une fréquence  $\omega$  réglable. La quantité  $E(t)$  décrite par l'équation (10) est calculée et son maximum temporel est donné par

$$\hat{E} = \max_{t \in [0, t_{\text{fin}}]} E(t)$$

La figure 5 montre  $\hat{E}$  par rapport à  $\omega$  pour  $t_{\text{fin}} = 100$  s ainsi que les fréquences propres correspondantes aux modes propres  $n = 0, 1, 2$ . Les simulations ont été effectuées avec  $n_x = 256$  et  $\beta_{\text{CFL}, \text{max}} = 1$ .

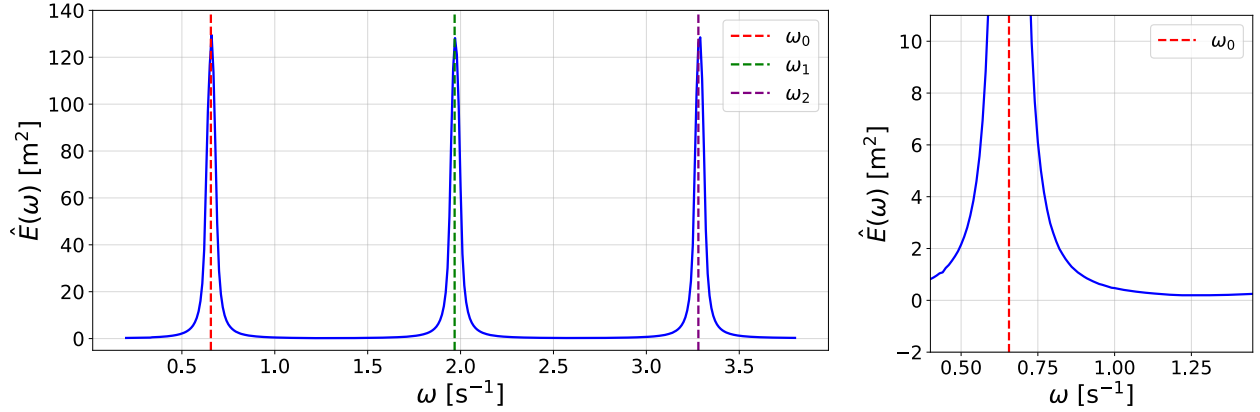


FIGURE 5 – Variation de  $\hat{E}(\omega)$ ,  $t_{\text{fin}} = 100$  s (a) Graphe complet (b) Zoom

Pour des fréquences d'excitation proches des fréquences propres des pics de  $\hat{E}$  sont observées. Tandis que en dehors de ces pics,  $\hat{E}$  reste faible, c'est-à-dire dans l'ordre de grandeur de l'amplitude de l'excitation. Ceci est donc une autre manière de trouver les fréquences des modes propres du système étudié.

## 3.2 Vague approchant de la plage

La profondeur de l'océan en figure 6 est décrite par l'équation

$$h_0(x) = \begin{cases} h_L & \text{si } 0 \leq x \leq x_a, \\ \frac{1}{2}(h_L + h_R) + \frac{1}{2}(h_L - h_R) \cos\left(\frac{\pi(x-x_a)}{x_b-x_a}\right) & \text{si } x_a < x < x_b, \\ h_R & \text{si } x_b \leq x \leq L. \end{cases}$$

avec  $h_L = 8$  km,  $h_R = 20$  m,  $L = 1000$  km,  $x_a = 450$  km,  $x_b = 950$  km. La forme initiale de la vague est identique à celle en équation 12 avec  $\hat{f} = 1$  m,  $x_1 = 50$  km,  $x_2 = 350$  km. La vague n'interagit pas avec les bords et peut donc sortir librement de la zone étudiée. Le temps de simulation est  $t_{\text{Fin}} = 12000$  s, afin que la vague ait le temps d'atteindre la plage. Le nombre de pas  $n_{\text{steps}} = 40000$  est choisi de tel sorte que  $\max \beta_{\text{CFL}} \leq 1$  et pour obtenir des résultats précis. La taille du maillage est  $n_x = 5096$ , la vague se propage vers les  $x$  positifs et l'équation de propagation utilisée est l'équation (B).

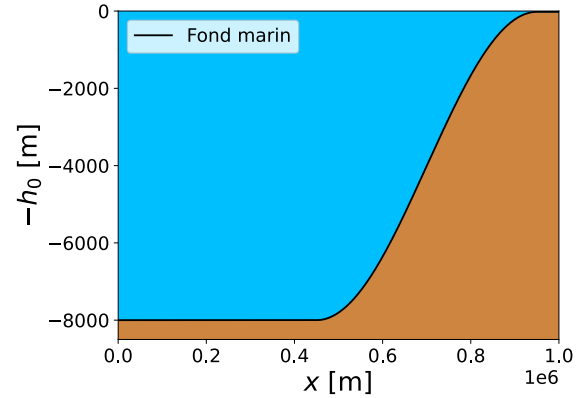


FIGURE 6 – Profil de profondeur de l'océan

## Résultats de la simulation

La figure 7 caractérise la propagation obtenue et [cette vidéo](#) illustre le déplacement de la vague au cours du temps.

Proche de la plage où la profondeur diminue, l'amplitude de la crête augmente. Par ailleurs, une partie de l'onde incidente est réfléchiée vers le large à cause de la variation continue de vitesse. En effet, cela ressemble au comportement d'une onde à l'interface de deux milieux de propagation homogènes où la vitesse de phase est différente. Une onde réfléchiée et une onde transmise sont alors créées. Le phénomène ici est semblable et une onde est réfléchiée de manière continue. D'après la figure 7, cette onde admet ici une crête inversée dirigée vers les profondeurs.

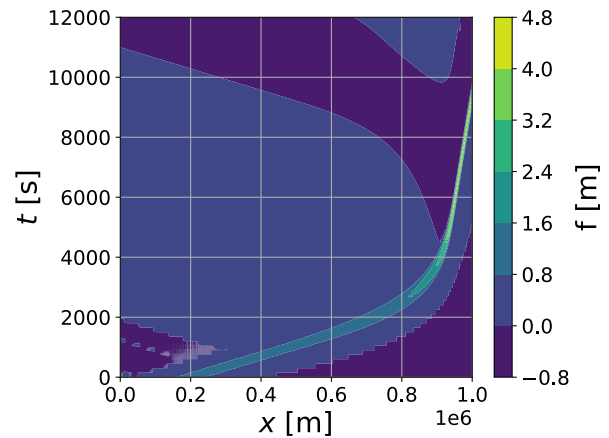


FIGURE 7 – Représentation de la propagation de la vague

La figure 8 représente la hauteur de la crête de la vague en chaque point de maillage  $x_i$  fixé. Une interpolation quadratique de  $f(x_i, t)$  selon  $t$ , utilisant 3 temps au voisinage de  $t_i = \arg\max_t f(x_i, t)$  est réalisé. Cela permet de compenser la discrétisation temporelle et de trouver les maximums  $f(x_i, t_{\text{crête}, i})$ . La figure 9 donne la vitesse de propagation de la crête  $v$  en fonction de sa position. Cette vitesse est calculée d'après la formule

$$v_i = \frac{x_{i+k} - x_{i-k}}{t_{\text{crête}, i+k} - t_{\text{crête}, i-k}}$$

où  $k = 600$  est un entier choisi assez grand pour réduire les oscillations de  $v_i$  dues aux calculs numériques mais assez faible pour que la prédiction soit fiable. Cet entier doit être du même ordre que  $n_{\text{stride}} = 500$  signifiant que les valeurs retournées par la simulation sont celles d'un point toutes les  $n_{\text{stride}}$  étapes de calculs. Les résultats obtenus sont comparés avec la solution obtenue par l'analyse WKB réalisée en section 2.3.

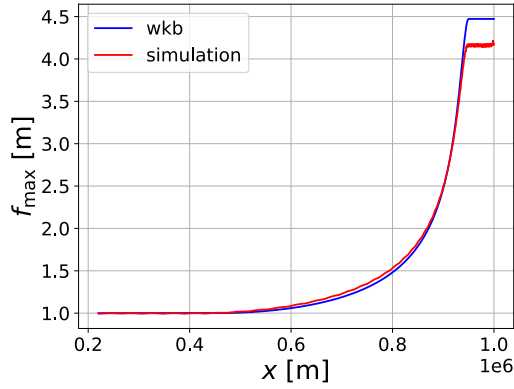


FIGURE 8 – Comparaison de l’amplitude de la crête  $f_{\max}$  atteint en position  $x$  obtenues par la simulation et l’analyse WKB

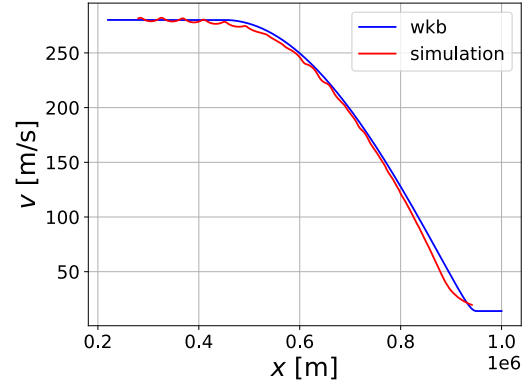


FIGURE 9 – Comparaison de la vitesse de progression de la vague  $v$  selon la position  $x$

L’amplitude de la crête  $f_{\max}$  augmente bien de manière proportionnelle à  $h_0(x)^{-1/4}$  comme prédit par l’analyse WKB. La prédiction semble satisfaisante jusqu’à la position  $x = 950$  km. En effet, une erreur relative de 3% entre les deux courbes est obtenue. Cet écart relatif est calculé d’après la formule (19) en Annexes. Cependant, à partir de cette position limite, l’écart relatif entre la prédiction et la simulation devient 7%. À cet endroit, une des hypothèses utilisées pour l’étude WKB n’est plus valable. Les perturbations liées à la variation de profondeur ne sont plus faibles telles que  $\delta h \ll h_0$  et des phénomènes non linéaires apparaissent. Il est à noter que ce graphe commence à la position  $x = 200$  km, car la crête n’atteint jamais les positions précédentes.

La prédiction WKB pour  $v$  est aussi proche des résultats obtenus par la simulation. Un écart relatif global de 2% est obtenu. La prédiction WKB est coupée pour les premiers et derniers points, car il n’est pas possible d’utiliser des positions éloignées de  $k$  points maillages.

### Fonds océaniques de plus en plus raides

Le point  $x_a$  est maintenant rapproché de  $x_b$  afin d’étudier l’impact de pentes raides sur la vague formée. La figure 10 représente l’évolution de l’amplitude crête  $f_{\max}$  pour différents choix de  $x_a$ . Tandis que la figure 11 représente la vitesse  $v$  de la crête.

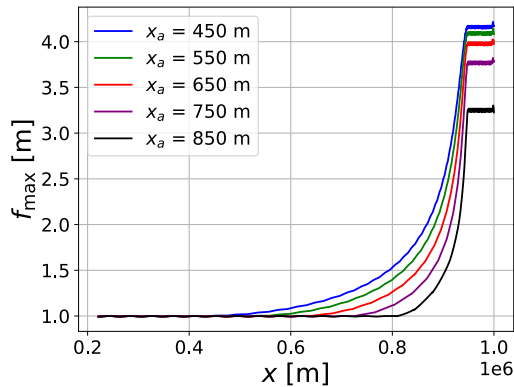


FIGURE 10 – Amplitude crête  $f_{\max}$  selon la position  $x$  pour différents choix de  $x_a$

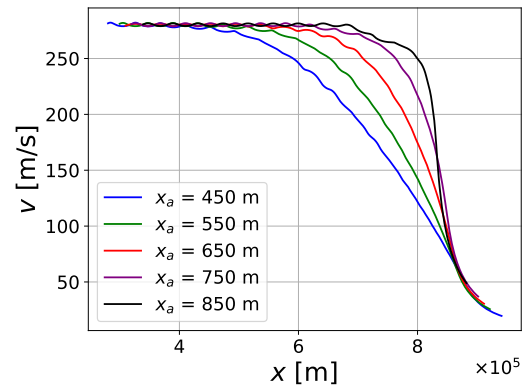


FIGURE 11 – Vitesse  $v$  de la vague selon la position  $x$  et la pente du fond marin

Ces figures permettent de conclure que des pentes plus raides donnent une amplitude crête plus faible mais une vitesse de groupe plus importante. Ainsi, les côtes les plus soumises à des tsunamis importants sont celles où la montée est progressive sur une grande distance. Par ailleurs, la partie de l'onde réfléchie est d'autant plus grande que  $x_a$  est proche de  $x_b$ . Par exemple, pour  $x_a = 900$  km, le [comportement suivant](#) est obtenu et la propagation est représentée en figure 12. En effet, cela s'explique par une variation plus brutale de la vitesse de phase qui peut s'identifier à une interface entre deux milieux de propagation ayant des vitesses de phases très différentes créant ainsi une onde réfléchie plus importante.

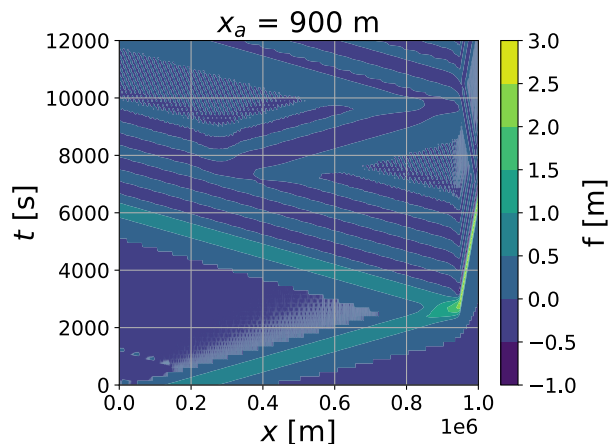


FIGURE 12 – Propagation de la vague avec  $x_a = 900$  km

Pour des pentes importantes comme sur la vidéo où  $x_a = 900$  km, une seconde crête se propageant vers la plage apparaît. Celle-ci est dirigée vers les profondeurs. Elle peut s'expliquer par des erreurs numériques lorsque les perturbations sont brutales.

### Résultats pour l'équation (A)

La profondeur de l'océan est rétablie avec  $x_a = 450$  km. L'analyse est répétée en utilisant cette fois l'équation de propagation (A). La figure 13 caractérise la propagation, la [vidéo suivante](#) illustre la progression de la vague. La figure 14 donne la hauteur crête  $f_{\max}$  de la vague en fonction de la position  $x$  et la figure 15 la vitesse de propagation  $v$  de la vague. Les résultats sont à nouveau comparés avec l'analyse WKB en section 2.3.

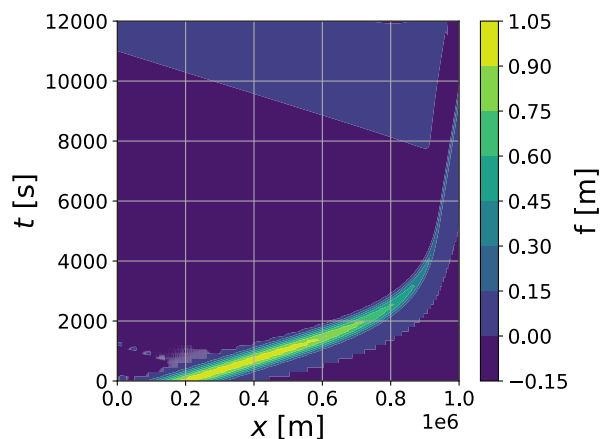


FIGURE 13 – Propagation de la vague pour l'équation (A)

Cette fois, l'amplitude diminue lorsque la vague s'approche de la plage. Il n'y a donc pas de risque de tsunami. Une partie de l'onde est également réfléchie vers le large, mais contrairement au cas précédent, l'onde réfléchie admet une crête dirigée vers le ciel.



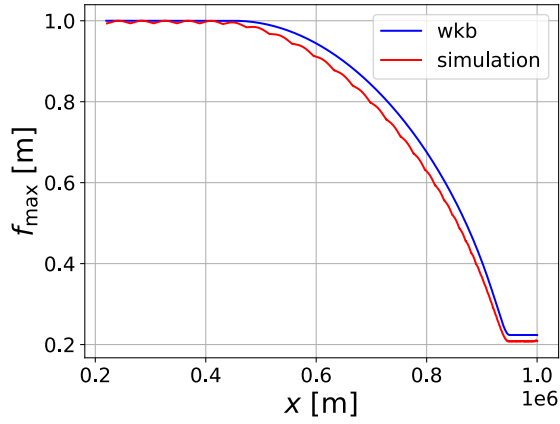


FIGURE 14 – Amplitude de la crête  $f_{\max}$  selon la position  $x$  pour l'équation (A)

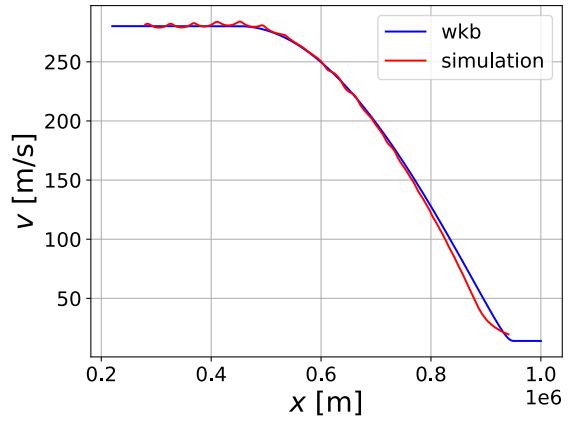


FIGURE 15 – Vitesse de la vague  $v$  en la position  $x$  pour l'équation (A)

Les prédictions WKB sont encore une fois proches de résultats obtenus par la simulation. Pour les positions  $x \leq 950$  km, les écarts de crête  $f_{\max}$  sont plus importants que précédemment avec un écart relatif de 4%. Et, l'écart relatif d'amplitude au niveau de la plage en  $x \geq 950$  km est de 7%. La vitesse de crête  $v$  diminue bien lorsque la profondeur diminue. Les prédictions pour les vitesses donnent un écart relatif de 2% entre les deux courbes.

### Résultats pour l'équation (C)

Les procédés sont à nouveau répétés en utilisant cette fois l'équation (C). La figure 16 montre la propagation de la vague, tandis que la [vidéo suivante](#) trace visuellement son évolution. La figure 17 présente la hauteur de la crête en fonction de la position, et la figure 18 rend compte de la vitesse de propagation.

Tout comme pour l'équation (B), l'amplitude augmente en s'approchant de la plage. Une très faible partie de l'onde est reflétée vers le large.

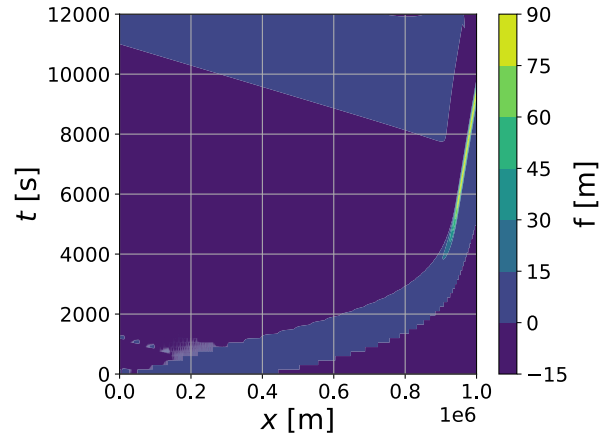


FIGURE 16 – Propagation de la vague pour l'équation C



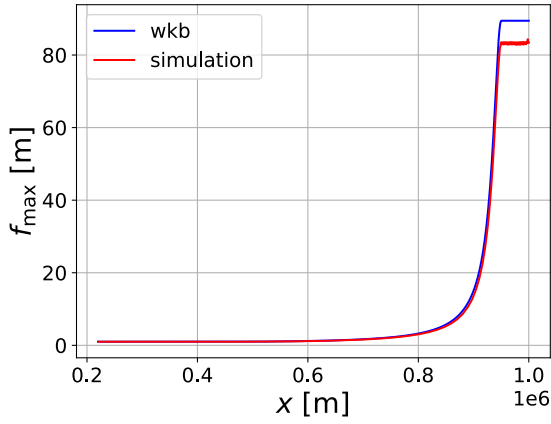


FIGURE 17 – Amplitude de la crête  $f_{\max}$  selon la position  $x$  pour l'équation (C)

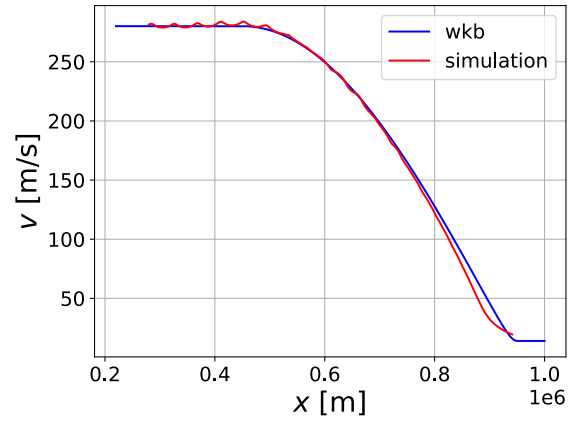


FIGURE 18 – Vitesse de la vague  $v$  pour chaque position  $x$  avec l'équation (C)

Les prédictions sont encore une fois satisfaisantes. Pour l'amplitude de la crête  $f_{\max}$ , un écart relatif de 9% est obtenue avant la plage en  $x = 950$  km. Cet écart est plus important qu'usuellement, mais cela peut s'expliquer par des valeurs plus proches de 0 qui rendent les écarts relatifs plus importants. Puis l'écart devient 7% au niveau de la plage en  $x \geq 950$  km. Enfin, l'écart pour la vitesse  $v$  est de 2%. La vitesse diminue encore une fois en arrivant à la plage.

### Comparaison des équations (A), (B), (C)

La figure 19 représente les amplitudes  $f_{\max}$  des crêtes des vagues trouvées par la simulation pour les trois équations. L'échelle est partagée de manière à visualiser la différence d'ordre de grandeur. La figure 20 fait de même pour les vitesses  $v$  de progression des vagues.

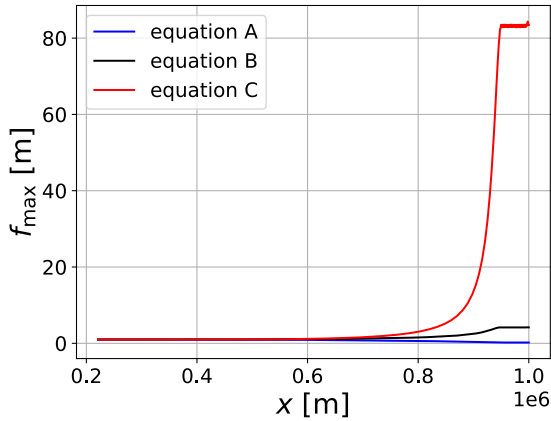


FIGURE 19 – Comparaison des amplitudes  $f_{\max}$  aux positions  $x$  selon l'équation utilisée

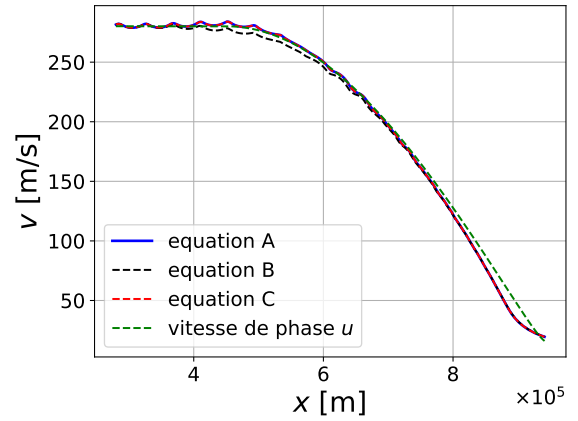


FIGURE 20 – Comparaison des vitesses  $v$  de la vague pour chaque équation

Les vitesses obtenues sont très similaires entre elles et sont très proches de la vitesse de phase  $u$ . La vitesse semble donc être indépendante de l'équation. À l'inverse l'amplitude

$f_{\max}$  varie très fortement. L'équation (A) annule toute possibilité de tsunami, car l'amplitude diminue proportionnellement avec  $h_0^{1/4}$ . Les équations (B) et (C) causent une augmentation de l'amplitude de la vague à l'approche de la côte lorsque la profondeur diminue. Pour l'équation (B), l'amplitude est proportionnelle à  $h_0^{-1/4}$  alors que pour l'équation (C), l'amplitude est proportionnelle à  $h_0^{-3/4}$ . Une différence de puissance de seulement  $\frac{1}{2}$  est malgré tout à l'origine d'une amplitude finale 20 fois plus grande pour l'équation (C). À moindre mal, l'équation physique est l'équation (B). Ainsi, les tsunamis ne sont pas impossibles, mais ceux-ci ne seront pas extrêmes comme ceux obtenus par l'équation (C).

L'équation (B) semble donner une onde réfléchie avec une crête vers les profondeurs tandis que les équations (A) et (C) semblent créer une onde réfléchie avec une crête dirigée vers le ciel. Mais les amplitudes sont trop faibles pour réellement conclure. Ainsi, dans le but de vérifier ce phénomène, la pente est rendue plus raide afin d'augmenter l'amplitude de l'onde réfléchie d'après la section 3.2. Avec  $x_a = 900$  km, l'onde réfléchie est nettement plus discernable. Les équations (A) et (C) donnent comme résultat final une crête vers les profondeurs, tandis que l'équation (B) donne une crête vers le ciel. Ces observations sont assez étonnantes. En effet, la vitesse de phase diminue, il serait donc normal de s'attendre à ce que le système se comporte comme une onde arrivant dans un milieu de propagation plus rigide. L'onde réfléchie serait alors inversée pour toutes les équations, ou au moins pour l'équation physique (B). De plus la direction est opposée à celle observée précédemment pour une faible pente. Il faudrait faire une étude plus approfondie pour comprendre l'origine de ces différences.

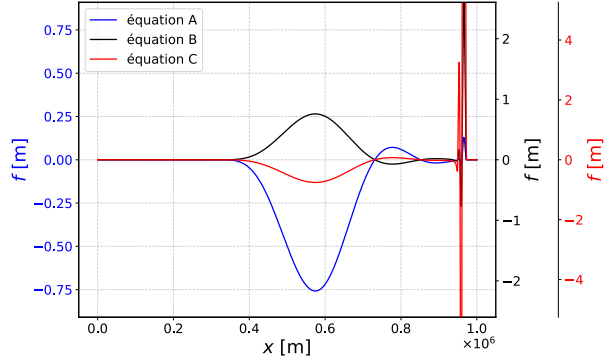


FIGURE 21 – Direction de la crête réfléchie pour  $x_a = 900$  km et  $t = 4000$  s selon l'équation utilisée

### 3.3 Facultatif : Prédiction WKB plus complète

Il est possible d'aller plus loin dans l'analyse WKB de l'équation (B) en section 2.3 afin de trouver une approximation de  $f(x, t)$  proche des résultats obtenus par la simulation en section 3.2. La première partie de l'analyse WKB donne l'évolution pour une seule fréquence  $w$ . Il est possible de trouver une approximation plus générale en considérant une superposition continue de fréquence.

$$f(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) \hat{f}(x, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

avec  $\hat{f}(x, \omega) = A(x) e^{iS(x, \omega)}$  trouvée précédemment et  $\tilde{f}$  donnant la contribution de chaque fréquence. Il découle alors

$$f(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) \hat{f}(x, \omega) d\omega$$

En multipliant par le conjugué complexe  $\hat{f}(x, \omega_0)^*$  et en intégrant par  $x$  il suit

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, 0) \hat{f}(x, \omega)^* d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left( \tilde{f}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} dx \left( \hat{f}(x, \omega) \hat{f}(x, \omega_0)^* \right) \right)$$

Par orthogonalité des fonctions  $\hat{f}(x, \omega)$  propre à la méthode WKB, l'identité suivante simplifie les calculs

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x, \omega_0)^* \hat{f}(x, \omega) dx = \langle \hat{f}(\omega_0) | \hat{f}(\omega) \rangle = \delta(\omega - \omega_0)$$

avec  $\delta(\omega - \omega_0)$  un delta de Dirac. L'équation devient

$$\tilde{f}(\omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x, \omega_0)^* f(x, 0) dx \quad (16)$$

Finalement la solution est

$$f(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{f(x', 0)}{\sqrt{u(x)u(x')}} \exp \left( -i\omega \left( t + \int_0^y \frac{1}{u(y)} dy \right) \right) \quad (17)$$

Cette intégrale est résolue numériquement avec un maillage pour  $x$  et une discrétisation pour  $t$ . L'intégrale interne est approximée avec la méthode de Riemann par une somme d'aire de rectangle. Les transformations de Fourier sont réalisées numériquement. La vague obtenue est visible dans [cette vidéo](#) ou en figure 22. Le résultat est pratiquement identique si ce n'est qu'aucune partie de la vague n'est réfléchiée vers le large. En effet, pour l'analyse WKB, il a été supposé que la pente est douce, c'est-à-dire que les variations de vitesses sont faibles. Or, c'est justement ces variations de vitesses brusques qui causent l'onde réfléchiée, comme étudiée en section 3.2.

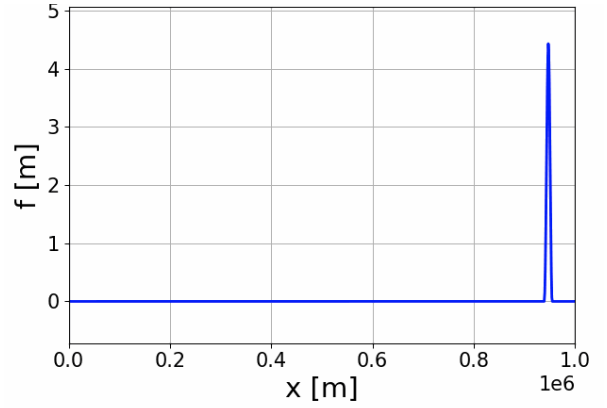


FIGURE 22 – Vague finale obtenue sans simulation à l'aide de WKB à  $t = 5820$  s

## 4 Conclusion

L'étude a porté sur la propagation d'une vague dans un océan à profondeur variable, modélisée par trois équations différentielles distinctes. Dans un premier temps, le comportement de la simulation a été analysée dans le cas d'une profondeur constante. Dans ce cas, les trois équations sont équivalentes. La condition de stabilité théorique  $\beta_{\text{CFL}} \leq 1$  a été vérifiée numériquement. Ensuite, la convergence du schéma numérique vers la solution analytique a été étudiée dans le cas des modes propres. Il a été montré que les fréquences propres peuvent être trouvées par excitation résonnante du système. Ensuite, une simulation a été menée pour étudier une vague approchant d'une plage où la profondeur diminue progressivement. Il a été observé que les trois équations donnent des vitesses et amplitudes de vague différentes. À moindre mal, l'équation physique est l'équation (B). Ainsi, l'amplitude n'est pas extrême comme pour l'équation (C), mais les tsunamis ne sont pas impossibles comme pour l'équation (A). L'analyse WKB a permis de retrouver ces résultats avec des écarts relatifs généralement inférieurs à 10%. Une analyse théorique approfondie pourrait être réalisée pour comprendre davantage l'impact de l'équation utilisée pour la direction de la vague réfléchiée. Par la suite,

l'influence de la pente du fond marin a été examinée. Des fonds plus raides réduisent l'amplitude de la crête de la vague, augmentent sa vitesse de groupe et renforcent l'onde réfléchie. Enfin, une analyse WKB plus complète a été réalisée afin de reconstruire approximativement la propagation de la vague comme une superposition continue de fréquence.

## Références

- [1] Laurent Villard et Dr Giovanni Di Giannatale. Physique numérique lv spc epf - physique numérique – exercice 5 Énoncé, 2025. URL : [https://moodle.epfl.ch/pluginfile.php/77521/mod\\_resource/content/29/Exercice5\\_2025.pdf](https://moodle.epfl.ch/pluginfile.php/77521/mod_resource/content/29/Exercice5_2025.pdf).
- [2] Laurent Villard. Physique numérique - epfl - notes du cours phys-210, 2025. URL : <https://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=287>.

## Annexes

Grandeur	Valeur
$L$ [m]	15
$h_0$ [m]	4
Condition au bord gauche	libre
Condition au bord droite	fixe et excitation
$\hat{f}$ [m]	1
$x_1$ [m]	3
$x_2$ [m]	8
$n_x$	64

TABLE 1 – Valeurs des paramètres utilisés en section 3.1 [1]

Grandeur	Valeur
$h_L$ [km]	8
$h_R$ [m]	20
$L$ [km]	1000
$x_a$ [km]	450
$x_b$ [km]	950
$\hat{f}$ [m]	1
$x_1$ [km]	50
$x_2$ [km]	350
Durée $t_{\text{Fin}}$ [s]	12000
Étapes de calcul $n_{\text{steps}}$	40000
Maillage $n_x$	5096
Équation	B
Condition aux bords	libre

TABLE 2 – Valeurs des paramètres utilisés en section 3.2 [1]

**Démonstration du lien entre la quantité  $E(t)$  et l'énergie par unité de longueur  $\mathcal{E}(t)$**

$$\mathcal{E}(t) = \int_0^L \left( \frac{1}{2} \rho g f(x, t)^2 + \frac{1}{2} \rho h(x) \left( \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right)^2 \right) dx$$

Avec l'hypothèse  $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \simeq \frac{f(x, t)u(x)}{h(x)}$ . Alors

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \rho \int_0^L \left( g f(x, t)^2 + \frac{h f(x, t)^2}{u(x)^2} dx \right) = \rho g E(t) \quad (18)$$

Pour avoir une véritable énergie, il faudrait considérer le problème en 3D, et multiplier  $\mathcal{E}(t)$  par la largeur  $l$  de l'océan considérée.

**Formules utilisées pour les écarts relatifs symétriques entre deux courbes  $a(x)$  et  $b(x)$**

$$\delta(a, b) = 2 \cdot \frac{\|a - b\|}{\|a\| + \|b\|} \quad (19)$$